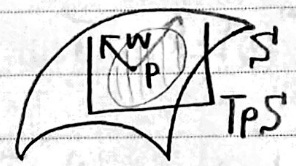
Μάθημα 16ο 02/12/16

Κάθετη καμπυλότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$. Ονομάζουμε κάθετη καμπυλότητα της S στο σημείο ως προς την εφαπτομενική διεύθυνση $w \in T_pS - \{0\}$ τον αριθμό $K_n = \dfrac{II_p(w)}{I_p(w)}$



$w = aX_u + bX_v$, $I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2$

$\lambda w = \lambda a X_u + \lambda b X_v$ $\quad II_p(w) = ea^2 + 2fab + gb^2$

$$K_n(aX_u + bX_v) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

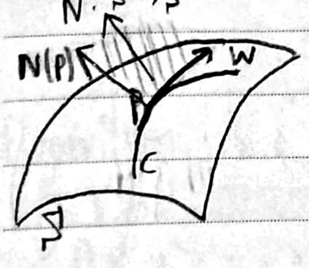
1 $K_n(X_u) = \dfrac{e}{E}$, $K_n(X_v) = \dfrac{g}{G}$

2 $K_n(\lambda w) = K_n(w)$

$\lambda \neq 0$

Μπορώ να υποθέτω ότι $\|w\| = 1$

Γεωμετρική ερμηνεία



$w \in T_pS$, $\|w\| = 1$

$K_n(w) = ?$

Θεωρώ την καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με παράμετρο το μήκος s και $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = w$.

$K_n(w) = \dfrac{II_p(w)}{I_p(w)} = II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle = -\langle dN_p(w), w \rangle = -\langle (N \circ c)^{\cdot}(0), \dot{c}(0) \rangle$

$<(N\circ c)^{\circ}(0), \dot{c}(0)> = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left(<(N\circ c)(s), \dot{c}(s)>\right) - <N\circ c(0), \ddot{c}(0)> = -<N(P), \ddot{c}(0)>$

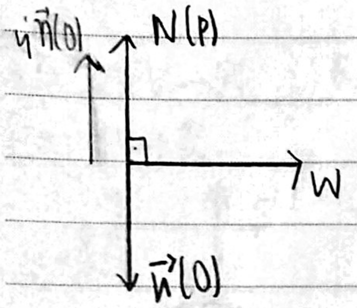
$K_n(W) = <N(P), \ddot{c}(0)>$

Έστω η c έχει παντού θετική καμπυλότητα K

$\ddot{c}(0) = \vec{t}'(0) = K(0)\,\vec{n}(0)$

$K_n(W) = K(0) <N(P), \vec{n}(0)>$

Θεωρώ ως C την τομή της S με το επίπεδο που περιέχει το p και //N(P), W



$\vec{n}(0) \neq N(P)$

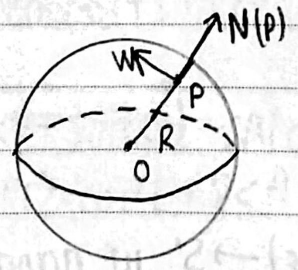
Συμπέρασμα: $K_n(W) = \pm K(0)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Me): όλες οι επιφανειακές καμπύλες που διέρχονται από το p και έχω κοινή εφαπτομένη ευθεία, έχω την ίδια κάθετη καμπυλότητα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Επίπεδο: $K_n(W) = \pm K(0) = 0$

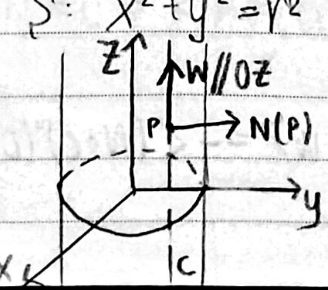
2) S_R^2



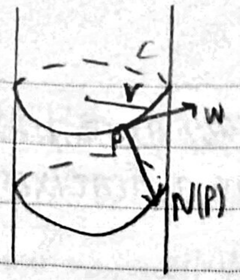
$K_n(W) = \pm K(0) = \pm \frac{1}{R}$

$L_p = \pm \frac{1}{R}\, Id$

3) Κύλινδρος $S: x^2 + y^2 = r^2$



$K_n(W) = \pm K(0) = 0.$

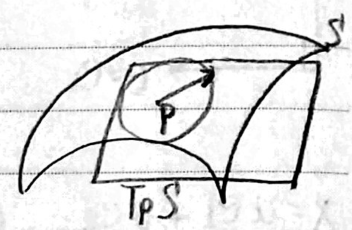


$w \parallel Oxy$

$$K_n(w) = \pm K(0) = \pm \frac{1}{r}$$

Κύριες καμπυλότητες

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια και $p \in S$. Κύριες καμπυλότητες της S είναι οι αριθμοί: $K_1(p) = \max\{K_n(w) / w \in T_pS, \|w\| = 1\}$.
$K_2(p) = \min\{K_n(w) / w \in T_pS, \|w\| = 1\}$



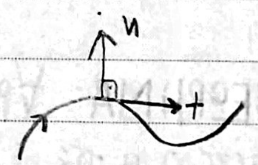
Ορίζονται συναρτήσεις $K_1, K_2 : S \to \mathbb{R}$.
Εξ' ορισμού $K_1 \geq K_2$!!!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Επίπεδο: $K_n(w) = 0 \quad \forall p, \forall w \in T_pS$
$K_1 = K_2 = 0$

2) S_R^2: $K_n(w) = \pm \frac{1}{R}$
$K_1 = K_2 = \pm \frac{1}{R}$

$$\begin{cases} - & N = \text{εξωτ.} \\ + & N = \text{εσωτ.} \end{cases}$$



3) $K_1 = \frac{1}{r}$, $K_2 = 0$ όταν $N =$ εσωτερικό

$\left(K_1 = 0, \ K_2 = -\frac{1}{r} \right)$ όταν $N =$ εξωτερικό

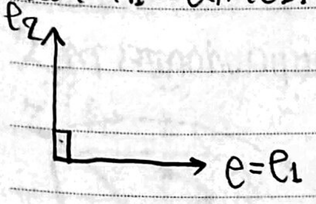
Παρένθεση: V δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο και διάσταση $\dim V = 2$
$A : V \to V$ αυτοπροσαρτημένος
$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$
$Q_A : V \to \mathbb{R}$, $Q_A(x) = B_A(x, x)$, $B_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $Q_A(e) = \max\{Q_A(x) / x \in V, \|x\| = 1\}$. Το e είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή $Q_A(e)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμ. μετασχηματισμός. Υπάρχει ορθομοναδιαία βάση ιδιοδιανυσμάτων $\{e_1, e_2\}$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με: $\lambda_1 = \max\{Q_A(x) \,/\, \|x\|=1,\ x\in V\}$

$\lambda_2 = \min\{Q_A(x) \,/\, \|x\|=1,\ x\in V\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\exists e$, $Q_A(e)=\max$, $e_1=e$, θεωρώ ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ και $\lambda_1 = Q_A(e_1)$, $\lambda_2 = Q_A(e_2)$.



$$\boxed{Ae_1 = \lambda_1 e_1}$$

$$Ae_2 = \langle Ae_2, e_1\rangle e_1 + \langle Ae_2, e_2\rangle e_2 \Rightarrow$$
$$Ae_2 = \underbrace{\langle Ae_1, e_2\rangle}_{=\lambda_1 e_1} e_1 + Q_A(e_2) e_2$$

$x = ae_1 + be_2$, $a^2+b^2=1$.

$$Q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle A(ae_1+be_2), ae_1+be_2\rangle =$$
$$= a^2\langle Ae_1, e_1\rangle + ab\cancel{\langle \underbrace{Ae_1}_{=\lambda_1 e_1}, e_2\rangle} + ab\cancel{\langle \underbrace{Ae_2}_{=\lambda_2 e_2}, e_1\rangle} + b^2\langle Ae_2, e_2\rangle$$

$$Q_A(x) = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 b^2 \overset{\lambda_1 \geq \lambda_2}{\geq} \lambda_2 a^2 + \lambda_2 b^2 = \lambda_2(a^2+b^2) = \lambda_2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\forall p\in S$, υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1(p), e_2(p)\}$ του T_pS τέτοια ώστε

$$L_p(e_1(p)) = K_1(p)e_1(p)$$
$$L_p(e_2(p)) = K_2(p)e_2(p).$$

$\begin{pmatrix} K_1(p) & 0 \\ 0 & K_2(p) \end{pmatrix}$ ως προς $\{e_1(p), e_2(p)\}$

p, $L_p: T_pS \to T_pS$ αυτοπροσαρτημένος γρ. μετασχ. $\mathrm{II}_p(w) = \langle L_p(w), w\rangle$

Τα $e_1(p), e_2(p)$ καλούνται κύριες διευθύνσεις της S στο p.

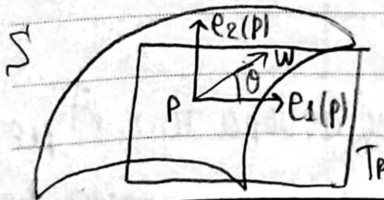
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: α) Οι κύριες είναι μοναδικές (ως προς πρόσημο) μόνο αν $K_1(p) > K_2(p)$

β) Αν $K_1(p) = K_2(p)$, τότε $L_p = K_1(p)\,Id$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $w\in T_pS$, $\|w\|=1$, $w = \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)$

Τότε ισχύει ο **τύπος του Euler**

$$K_n(w) = K_1(p)\cos^2\theta + K_2(p)\sin^2\theta$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $K_n(w) = \dfrac{\mathrm{II}_P(w)}{\mathrm{I}_P(w)} = \mathrm{II}_P(w) = \langle L_P w, w \rangle = \langle L_P(\cos\theta e_1(P) + \sin\theta e_2(P)), \cos\theta e_1(P) + \sin\theta e_2(P) \rangle$

$= K_1(P)\cos^2\theta + K_2 \sin^2\theta.$

Παρένθεση:

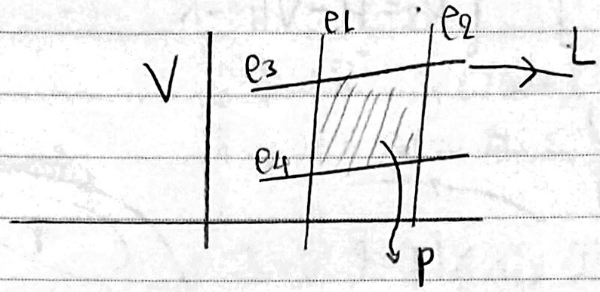
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

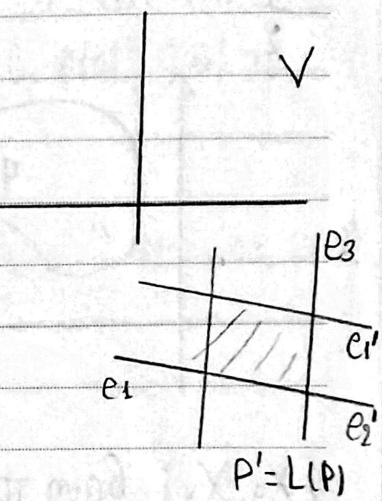
$\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22}$

$L: V \to V$, $\dim V = 2$.

$\{v_1, v_2\}$ $\{w_1, w_2\}$

A B





$B = P^{-1}AP$

$\det B = \det A = \det L$

$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A = \operatorname{trace} L$.

Εμβα(P') = |detL| εμβαδο(P)

Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Η καμπυλότητα Gauss είναι η συνάρτηση $K: S \to \mathbb{R}$ με $K(P) = \det L_P$.

Η μέση καμπυλότητα είναι η συνάρτηση $H: S \to \mathbb{R}$ με $H(P) = \frac{1}{2}\operatorname{trace} L_P$

$L_P \sim \begin{pmatrix} K_1(P) & 0 \\ 0 & K_2(P) \end{pmatrix}$ ως προς βάση κύριων διευθύνσεων $\{e_1(P)\ e_2(P)\}$.

$K(P) = \det L_P = \det \begin{pmatrix} K_1(P) & 0 \\ 0 & K_2(P) \end{pmatrix} = K_1(P)K_2(P)$

$K = K_1K_2$, $H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

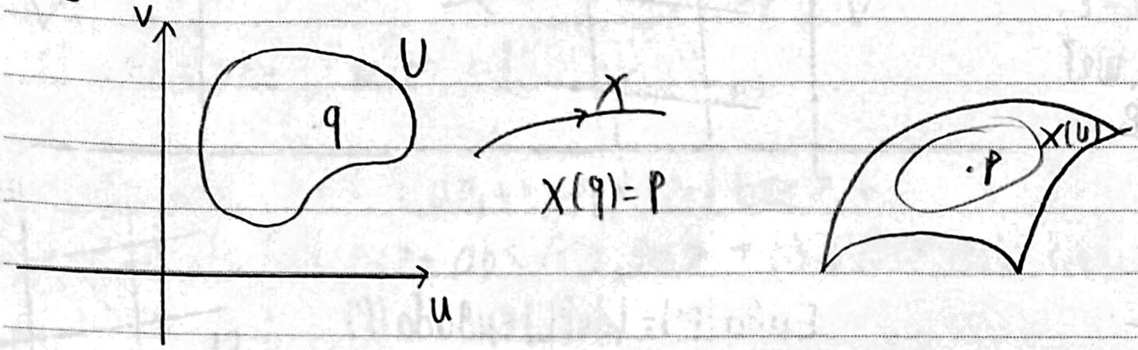
$H(P) = \frac{1}{2}\operatorname{trace} L_P = \frac{1}{2}(K_1(P) + K_2(P))$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $H^2 - K = \frac{1}{4}(K_1+K_2)^2 - K_1K_2 = \frac{1}{4}(K_1-K_2)^2$

$$H^2 - K = \frac{1}{4}(K_1-K_2)^2$$

• $H^2 \geq K$ και $H^2(p) = K(p) \Leftrightarrow K_1(p) = K_2(p)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(K_1-K_2) = \sqrt{H^2-K} \\ \frac{1}{2}(K_1+K_2) = H \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K_1 = H + \sqrt{H^2-K} \\ K_2 = H - \sqrt{H^2-K} \end{array}\right.$$



$\{X_u, X_v\}$ βάση του T_pS. Έστω ότι $A=(a_{ij})$ είναι πίνακας της L_p ως προς τη βάση $\{X_u, X_v\}$.

$$LX_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$
$$LX_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{11}E + a_{21}F = e \\ a_{11}F + a_{21}G = f \\ a_{12}E + a_{22}F = f \\ a_{12}F + a_{22}G = g \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

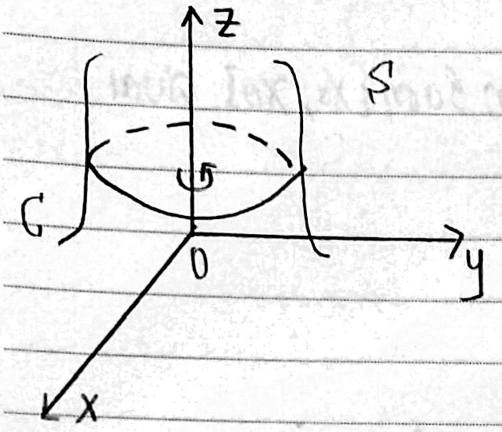
$$K(p) = \det L_p = \det A = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$\boxed{K \circ X = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}}$$

$$H \circ X = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} \Rightarrow H : S \to \mathbb{R} \text{ είναι λεία.}$$

$$K_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$
$$K_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$
, $K_1, K_2 : S \to \mathbb{R}$ συνεχείς

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



Εκ περιστροφής επιφάνειες

$C : I \to \mathbb{R}^3$, $C(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$, $\varphi(s) > 0$.

s = μήκος τόξου της C.

$X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos\theta, \varphi(s)\sin\theta, \psi(s))$

$X_s = (\dot{\varphi}(s) \cos\theta, \dot{\varphi}(s)\sin\theta, \dot{\psi}(s))$
$X_\theta = (-\varphi(s)\sin\theta, \varphi(s)\cos\theta, 0)$

$X_{ss} = (\ddot{\varphi}(s)\cos\theta, \ddot{\varphi}(s)\sin\theta, \ddot{\psi}(s))$
$X_{\theta\theta} = (-\varphi(s)\cos\theta, -\varphi(s)\sin\theta, 0)$
$X_{\theta s} = (-\dot{\varphi}(s)\sin\theta, \dot{\varphi}(s)\cos\theta, 0)$

$$X_s \times X_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\varphi}\cos\theta & \dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\psi} \\ -\varphi\sin\theta & \varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\varphi\dot{\psi}\cos\theta, -\varphi\dot{\psi}\sin\theta, \varphi\dot{\varphi})$$

$$\|X_s \times X_\theta\| = \varphi\sqrt{(\dot{\psi})^2 + (\dot{\varphi})^2} \Rightarrow \|X_s \times X_\theta\| = \varphi > 0 \text{ κανονική}$$

1η Θεμελιώδης μορφή

$E = \|X_s\|^2 = \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 = 1$
$F = \langle X_s, X_\theta \rangle = 0$
$G = \|X_\theta\|^2 = \varphi^2(s)$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix}$$

2η Θεμελιώδης μορφή

$e = \langle X_{ss}, N \rangle = \dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi}$

$f = \langle X_{s\theta}, N \rangle = 0$

$g = \langle X_{\theta\theta}, N \rangle = \varphi\dot{\psi}$

Μοναδιαίο κάθετο $N = \dfrac{X_s \times X_\theta}{\|X_s \times X_\theta\|}$

$N = (-\dot{\psi}\cos\theta, -\dot{\psi}\sin\theta, \dot{\varphi})$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi} & 0 \\ 0 & \varphi\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας της απεικόνισης Weingarten ως προς τη βάση $\{X_s, X_\theta\}$ είναι

$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \dots =$ διαγώνιος

$\Rightarrow \{X_s, X_\theta\}$ κύριες διευθύνσεις

$\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi} =$ καμπυλότητα της c.

$$\left.\begin{array}{l} K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = \dfrac{(\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi})(\varphi\dot{\psi})}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi} \cdot \left(\dot{\varphi}\dot{\psi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}(\dot{\psi})^2\right) \\ (\dot{\varphi})^2 + (\dot{\psi})^2 = 1 \Rightarrow \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \dot{\psi}\ddot{\psi} = 0 \Rightarrow \dot{\psi}\ddot{\psi} = -\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{\varphi}\left(-(\dot{\varphi})^2\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}(\dot{\psi})^2\right) \Rightarrow \boxed{K = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}}$$